6. Correction des exercices

Exercice 11.1 a) $f'(x) = -3x^2 + 6x + 9 = -3(x^2 - 2x - 3)$. Comme on veut étudier le signe de $f'(x)$, on essaie toujours de l'écrire sous forme factorisée : "qui dit signe, dit factorisation !"

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	-9	↗	23	↘	

b) $f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}(4x^2 - 1) = \frac{3}{4}(2x-1)(2x+1)$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	

c) $f'(x) = -4x^3 - 8x = -4x(x^2 + 2)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	5	↘	

Exercice 11.2 a) $f'(x) = \frac{3(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$\frac{3}{2}$	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	

b) $f'(x) = \frac{-4x}{(x^2+4)^2}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$\frac{3}{2}$	↘	

Exercice 11.3 a) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{3\}$.
$f'(x) = \frac{4}{(x-3)^2}$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$		↗	‖	↗	

b) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1\}$.
$f'(x) = 2 - \frac{2}{(x-1)^2} = \frac{2x(x+2)}{(x+1)^2}$

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$-$	
$f(x)$		↗	-5	↘	‖	↘	3	↗	

Exercice 11.4 1) f est définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$, $x \neq 0$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘	2	↗	

2) Par lecture du tableau de variations, $f(x) \geqslant 2$ pour tout $x > 0$, d'où le résultat demandé.

<u>Exercice</u> 11.5 1) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme.
$f'(x) = -4x + 4$.

x	$-\infty$	-2		1		2	$+\infty$
$f'(x)$			$+$	0	$-$		
$f(x)$		-19	↗	-1	↘	-3	

2) Rappelons-nous de la propriété **??** du chapitre **??** :Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et u une fonction définie sur I,**ne s'annulant pas** sur I et **de signe constant** sur I. Alors la fonction $\frac{1}{u}$ a un *sens de variation contraire* à celui de u sur I.
La fonction g a donc un sens de variation contraire à celui de f, et le minimum de g est $g(1) = -1$

<u>Exercice</u> 11.6 1.a) $\frac{MP}{AB} = \frac{CP}{CA}$, soit $\frac{MP}{3} = \frac{4-x}{4}$.
D'où $MP = \frac{3}{4}(4-x) = 3 - \frac{3}{4}x$.
1.b) $\mathscr{A}(x) = AP \times MP = \frac{3}{4}(4x - x^2)$.
2.a) $\mathscr{A}'(x) = \frac{3}{4}(4 - 2x)$.

x	0		2		4
$\mathscr{A}'(x)$		$+$	0	$-$	
$\mathscr{A}(x)$		↗	3	↘	

2.b) L'aire est maximale pour $x = 2$.

<u>Exercice</u> 11.7 1.a) $\cos(\widehat{BAM}) = \frac{AH}{AM} = \frac{AM}{AB}$, donc $AM^2 = 6x$ et $AM = \sqrt{6x}$.
1.b) Le triangle AMB inscrit dans un demi-cercle est rectangle, donc $(AM) \parallel (HK)$.
D'après le théorème de Thalès :
$\frac{HK}{AM} = \frac{BH}{BA}$, donc $HK = \frac{(6-x)\sqrt{6x}}{6}$, soit $f(x) = \frac{\sqrt{6}}{6}(6-x)\sqrt{x}$.
2.a) $f'(x) = \frac{\sqrt{6}}{6}\left[-\sqrt{x} + \frac{(6-x)}{2\sqrt{x}}\right] = \frac{\sqrt{6}(2-x)}{4\sqrt{x}}$.
2.b)

x	0		2		6
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	||	↗	$\frac{4\sqrt{3}}{3}$	↘	

Donc HK est maximal pour $x = 2$ et dans ce cas , $HK = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.